直観主義命題論理の決定時間について

了德寺大学教養教育センター　和手正道

On the Decision Time of the Intuitionistic Propositional Logic

Masamichi Wate, The Center for Liberal Arts Education, Ryotokuji University

[キーワード]: 直観主義，命題，Gentzen 流，Turing Machine，決定時間.

【Abstract】

Last year, we argued about the decision time of the classical logic. In this paper, we argue about the decision time of the intuitionistic propositional logic. There are the sequents which we are not able to decide the provability in the case of the intuitionistic logic, in contrast with the classical logic. So, we restrict to sequents to be composed only formulas which have not the plural negation (the left side does not contain the negation in the implication). Then, we can deside the provability of sequent within the exponential time.

1　序

関数の定義域をたとえ自然数だけに制限しても関数の総数は非可算個あるが，計算機で計算できる関数は可算個しかないからすべての関数が計算できるわけではない．しかし，たとえ計算できる関数と言ってもそれはあくまで理論上の問題であって実際には答えが出るまで100万年かかるかもしれない．その典型的な例として，Ackermann関数がある．Ackermann関数は理論的には計算可能ではあるが，nの値が大きくなるに従って加速度的に処理時間が大きくなる．私がcomputerを使って実験したところでは$n=3$まではほとんど瞬時に答えが出たが，$n=4$になるとcomputerが全く動かない(裏では動いているが目には見えない)．$n=10$かあるいは$n=100$くらいになればおそらく100万年くらいかかるのではないかと思われる．

入力dataの大きさをnとして結果を出すためには入力dataを読まなければならないから処理時間は少なくともnステップが必要となる．当然のことながらnが大きくなるほど処理時間も大きくなると考えられる．そこで処理時間$t(n)$をnの関数として表すと$t(n) \geqq n$は明らかであるが，この$t(n)$が多項式で抑えられるか，指数関数で抑えられるかなどということが議論の対象になる．この場合，nが比較的小さい場合は処理時間は定数で抑えられるから小さいnは無視して十分大きいnについてのみ議論の対象となる．

$t(n)$がi次多項式であれば$t(n)=a_0n^i+a_1n^{i-1}+\cdots$と表されるが，十分大きい$n$に対しては$t(n) \leqq (a_0+1)n^i$が成り立つのでこのことを$t(n) \leqq O(n^i)$と表す．指数関数の場合も同様に$t(n) \leqq O(2^n)$のような表現をする，等々．直観主義論理の展開の仕方はHilbert流とGentzen流があるが，ここではGentzen流で考える事にする．用いる論理記号は$\neg$(ではない)，$\wedge$(かつ)，$\vee$(または)，$\rightarrow$(ならば)，$\forall$(すべて)，$\exists$(存在) を用

いる．古典論理との違いはsequentの右側のformulaの数は常に1個以下ということである．従って，古典論理における(⊢換) や(⊢減) などは直観主義の場合はあり得ない．

formulaの定義

1. 命題記号P_n(n=1, 2, 3,...)はformulaである．
2. AとBがformulaのとき，$\neg A$，$A\wedge B$，$A\vee B$，$A\to B$はformulaである．
3. 1-2 によって得られるものだけがfoumulaである．

Γ と Δ がformulaの有限列(ただし，Δ の長さは1以下) のときΓ⊢Δという形の文字列をsequentという．直感的にはΓのすべてを仮定すればΔが導き出せると言う意味である．(Δが空列の場合はΓは矛盾することを意味する．) Aをformulaとするとき，公理は$A\vdash A$と言う形のsequentだけである．推論規則は以下のものである．

$$\frac{\Gamma\vdash\Delta}{A,\Gamma\vdash\Delta}\ (増\vdash) \qquad \frac{\Gamma\vdash}{\Gamma\vdash A}\ (\vdash 増)$$

$$\frac{\Gamma_1,B,A,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,A,B,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (換\vdash)$$

$$\frac{A,A,\Gamma\vdash\Delta}{A,\Gamma\vdash\Delta}\ (減\vdash)$$

$$\frac{\Gamma\vdash A}{\neg A,\Gamma\vdash}\ (\neg\vdash) \qquad \frac{A,\Gamma\vdash}{\Gamma\vdash\neg A}\ (\vdash\neg)$$

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Delta}{A\wedge B,\Gamma\vdash\Delta}\ (\wedge\vdash) \qquad \frac{B,\Gamma\vdash\Delta}{A\wedge B,\Gamma\vdash\Delta}\ (\wedge\vdash) \qquad \frac{\Gamma\vdash A\quad\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\wedge B}\ (\vdash\wedge)$$

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Delta\quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}\ (\vee\vdash) \qquad \frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash A\vee B}\ (\vdash\vee) \qquad \frac{\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\vee B}\ (\vdash\vee)$$

$$\frac{\Gamma_1\vdash A\quad B,\Gamma_2\vdash\Delta}{A\to B,\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (\to\vdash) \qquad \frac{A,\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}\ (\vdash\to)$$

$$\frac{\Gamma_1\vdash A\quad A,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (\mathrm{cut})$$

2 主定理

cut elimination theoremによって証明可能とcutなしで証明可能が同値だからcutなしで証明可能かどうかの判定を考えれば十分である．cut無しの証明図では上に行くに従って論理記号がだんだん減っていく事に注目する．sequentの種類を，内側に¬を含まないformulaのみからなるsequentに制限すると，sequentの長さをnとしてnに関する帰納法を用いて与えられたsequentが証明可能か否かを$O(2^n)$ステップで判定できる事を証明する．(これは証明できるかどうかの判定に要する時間であって，証明に要する時間ではない．)

Γ′ がΓの並べ替えに過ぎないときはΓ⊢Δの証明可能性とΓ′ ⊢Δの証明可能性は(換⊢)を用いることによって同値であることが容易に分かるから，以下の証明において(換⊢)の説明は省略する．

Case 1: Γ⊢Δの中に論理記号が1つも含まれていない場合

このsequentの証明に用いられる推論規則は(増⊢)のみであるから，これが証明可能であるための必要十分条件はΔが1個のfoumulaであり，それをAとするとΓの中にAが少なくとも1つ含まれていることである．Γ⊢Δがこの形をしているかどうかは線形時間，すなわち，$O(n)\leq O(2^n)$ス

テップで判定できる．

Case 2: $\neg A$，$\Gamma\vdash\Delta$という形の場合

これが証明可能であるための必要十分条件はΔが空列であってかつ$\Gamma\vdash A$が証明可能でなければならない．何故なら，$\neg A$，$\Gamma\vdash$の直前は$\Gamma\vdash A$ または$\neg A$，$\neg A$，$\Gamma\vdash$である．$\neg A$，$\Gamma\vdash$の直前が$\neg A$，$\neg A$，$\Gamma\vdash$であったとするとその上が$\neg A$，$\Gamma\vdash A$となり，Aは$\neg$を含まないので，このsequentの右辺がそれより上で空列になる可能性はない．従って，(増$\vdash$)以外で左辺の$\neg A$が消える唯一の可能性は($\rightarrow\vdash$)であるが，Γが$B\rightarrow C$，Γ_1 であったとすると，$\neg A$が消えるためには$\neg A$，$B\rightarrow C$，$\Gamma_1\vdash A$の上は

$$\frac{\neg A\vdash B \quad C,\Gamma_1\vdash A}{\neg A, B\rightarrow C,\Gamma_1\vdash A}\ (\rightarrow\vdash)$$

でなければならないが，仮定によって，BおよびCは$\neg$を含まない．従って$\neg A\vdash B$は証明不可能である．従って$\neg A$，$\Gamma\vdash A$が証明可能であるための唯一の可能性は

$$\frac{\Gamma\vdash A}{\neg A,\Gamma\vdash A}\ (\text{増}\vdash)$$

しかあり得ない．あたえられたsequent がΓ_1, $\neg A$，$\Gamma_2\vdash$という形をしているかどうかは線形時間で判定でき，他方,Γ_1，$\Gamma_2\vdash A$の長さは$<n$ だから，帰納法の仮定によってこのsequentの証明可能性は$O(2^{n-1})$ステップで判定できる．従って，もとのsequentは$O(n)+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定できる．

Case 3: $\Gamma\vdash\neg A$という形の場合

これが証明可能であるための必要十分条件はA，$\Gamma\vdash$が証明可能であることであり，後者の長さは前者のそれより短いから帰納法の仮定によって$O(n)+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定できる．

Case 4: $A\wedge B$，$\Gamma\vdash\Delta$という形の場合

このsequentの証明可能性はA，B，$\Gamma\vdash\Delta$の証明可能性と同値である．何故なら，前者が証明可能であればその直前は(a)A，$\Gamma\vdash\Delta$または(b)B，$\Gamma\vdash\Delta$または(c)$A\wedge B$，$A\wedge B$，$\Gamma\vdash\Delta$のいずれかである．(a)および(b)の場合は(増$\vdash$) によってA，B，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能であり，(c)の場合は$\wedge$がそれより上のどこかで必ず消えるはずであるからA，B，A，B，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能である．従って(減$\vdash$)によってA，B，$\Gamma\vdash\Delta$も証明可能である．

逆にA，B，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能であれば($\wedge\vdash$) により$A\wedge B$，$A\wedge B$，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能であり，従って(減$\vdash$) により$A\wedge B$，$\Gamma\vdash\Delta$も証明可能である．後者は前者より長さが短いので$O(n)+O(2^{n-1})+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定可能である．

Case 5: $\Gamma\vdash A\wedge B$という形の場合

これが証明可能であることは(a) $\Gamma\vdash A$および(b) $\Gamma\vdash B$が証明可能である事と同値である．

(a)の判定が$O(2^{n-1})$ステップで，(b)の判定が$O(2^{n-1})$ステップであるから全体として$O(n)+O(2^{n-1})+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定できる．

Case 6: $A\vee B$，$\Gamma\vdash\Delta$という形の場合

これの証明可能性は(a)A，$\Gamma\vdash\Delta$と(b)B，$\Gamma\vdash\Delta$の2 つが同時に証明可能であることと同値である．何故なら，前者が証明可能であればその直前は

$$(1)\ \frac{A,\Gamma\vdash\Delta \quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}(\vee\vdash) \quad (2)\ \cfrac{\cfrac{A\vee B,A,\Gamma\vdash\Delta \quad A\vee B,B,\Gamma\vdash\Delta}{A\vee B,A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}(\vee\vdash)}{A\vee B,\Gamma\vdash\Delta}(減\vdash)$$

のいずれかである．(2)の場合$\vee$はそれより上のどこかで消えるはずであるから$A\vee B$，A，$\Gamma\vdash\Delta$より上のどこかにA，A，$\Gamma\vdash\Delta$とA，B，$\Gamma\vdash\Delta$が同時に証明可能なsequentが現れるはずである．A，A，$\Gamma\vdash\Delta$に(減$\vdash$) を適用すると(a)A，$\Gamma\vdash\Delta$が証明できる．同様にして$A\vee B$，B，$\Gamma\vdash\Delta$より(b)も証明可能である．

逆は明らか．

(a)，(b)ともに前者より長さが短いので帰納法の仮定により$O(n)+O(2^{n-1})+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定可能である．

Case 7: $\Gamma\vdash A\vee B$という形の場合

この場合は(a)$\Gamma\vdash A$と(b)$\Gamma\vdash B$の少なくとも一方の証明可能性と同値であるから$O(n)+O(2^{n-1})+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定可能である．

Case 8: $A\to B$，$\Gamma\vdash\Delta$という形の場合

これが証明可能である事は(a)$\Gamma\vdash A$および(b)B，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能である事と同値である．何故ならば，前者が証明可能でかつ，$A\to B$，$\Gamma\vdash\Delta$の直前が

$$\frac{\Gamma_1\vdash A \quad B,\Gamma_2\vdash\Delta}{A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(\to\vdash) \quad (ただし，\Gamma_1\subseteq\Gamma,\Gamma_2=\Gamma-\Gamma_1)$$

の場合，(増$\vdash$)を用いると$\Gamma\vdash A$およびB，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能であり，直前が

$$\cfrac{\cfrac{A\to B,\Gamma_1\vdash A \quad B,\Gamma_2\vdash\Delta}{A\to B,A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(\to\vdash)}{A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(減\vdash)$$

の場合，仮定によりAは$\neg$ を含まないからcase2と同様にこの場合はあり得ない．

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1\vdash A \quad B,A\to B,\Gamma_2\vdash\Delta}{A\to B,A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(\to\vdash)}{A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(減\vdash)$$

の場合，右の枝の上のどこかで$\to$ が消えるはずであるから消えた場所では(1)B，$\Gamma_{21}\vdash A$と(2)B，$\Gamma_{22}\vdash\Delta$が同時に現れるかまたは(3)$\Gamma_{21}\vdash A$と(4)B，B，$\Gamma_{22}\vdash\Delta$が同時に現れるかいずれかである．(ここで，Γ_{21}，Γ_{22} は$\Gamma_{21}\subseteq\Gamma_2$，$\Gamma_{22}=\Gamma_2-\Gamma_{21}$である．) (2)と(4)のいずれの場合にも(増$\vdash$)と(減$\to$)によって$B$，$\Gamma\vdash\Delta$が証明可能である．また，(5)$\Gamma_1\vdash A$より(増$\vdash$) によって$\Gamma\vdash A$も証明可能である．

逆は

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\vdash A \quad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\to B,\Gamma,\Gamma\vdash\Delta}(\to\vdash)}{A\to B,\Gamma\vdash\Delta}(減\vdash)$$

より明らか．

(a)および(b)がそれぞれ$O(2^{n-1})$ステップで判定できるから$A\to B$，$\Gamma\vdash\Delta$は全体として$O(n)+O(2^{n-1})+O(2^{n-1})\leq O(2^n)$ステップで判定できる．

Case 9: $\Gamma \vdash A \to B$ という形の場合

これが証明可能であることはA，$\Gamma \vdash B$が証明可能であることと同値で，後者は$O(2^{n-1})$ステップで判定できるから前者は$O(n)+O(2^{n-1}) \leq O(2^n)$ステップで判定できる.

以上の結果をまとめると，次の定理が得られる.

主定理1 直観主義論理において$\Gamma \vdash \Delta$が証明可能か否かはおよびΔの中のformulaは内側に$\neg$を含まないという条件付きで$O(2^n)$ステップで判定可能である.

3 あとがき

本論分では直観主義命題論理をGentzen流で展開してきた. 古典命題論理ではGentzen流で展開しても，Hilbert流で展開しても証明可能性に変わりがないことが知られている. これは古典命題論理では証明可能性と恒真性が一致することに基づくものであるが，直観主義命題論理では排中律など，古典命題論理では証明できるはずのsequentが直観主義命題論理では証明できないものが存在する. 従って，直観主義命題論理の場合は古典命題論理の場合と異なり，sequentの真理値だけからは証明可能性の判定は出来ない. この論文では古典命題論理と同様，直観主義命題論理の場合にも，ある条件の下では判定には$O(2^n)$時間あれば十分である事を示したが，$O(2^n)$時間必要であることを示したわけではない. 多項式時間で判定できる可能性もあり得る. 多項式時間では判定できない事を示す事が今後の課題として残されている. 古典命題論理に続いて直観主義命題論理の証明可能性の判定時間を調べたが，今後は線形命題論理についても同様のことを調べてみたい.

[謝意]

この論文の執筆に当たってSLACS2007（2007年9月，慶応大学日吉キャンパス）および2007MLG (2007年12月，城崎玄武) の関係者の方々から多大なるサジェスチョンをいただいたことに対して感謝する次第である.

[参考文献]

[1] M. Wate, Modied Decision Time of Classical Logic, 了徳寺大学研究紀要，第1号 (2007)，pp77-85

[要旨]

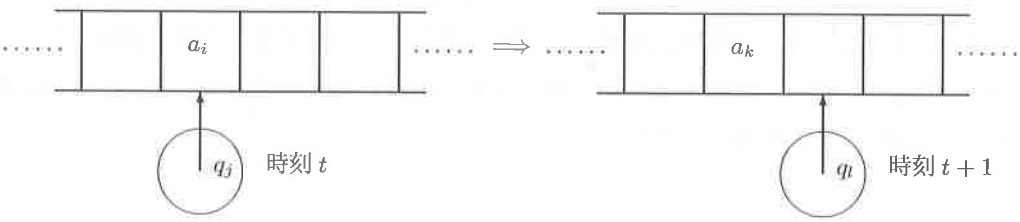
論理学におけるsequent とはある法則に従って並べられた文字列の事である. ここで許される文字は自由変数 $(a_0, a_1, a_2, ...)$，束縛変数 $(x_0, x_1, x_2, ...)$，関数記号 $(f_0, f_1, f_2, ...)$，述語記号 $(P_0, P_1, P_2, ...)$，論理記号($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$, $\exists$, $\vdash$) 補助記号(カッコとコンマ) だけである. termとformulaは以下のように帰納的に定義される：

1. 自由変数はtermである.
2. fが関数記号で，$t_1, ..., t_n$ が termのとき，$f\ (t_1,......,t_n)$ は termである.
3. Pが述語記号で，$t_1, ..., t_n$ が termのとき，$P\ (t_1,......,t_n)$ は formulaである.
4. A，B がformulaのとき，$\neg A$，$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \to B$ はformulaである.

5. A (a)が自由変数aを含むformulaで，xがA (a)の中にない束縛変数のとき，$\forall xA(x)$，$\exists xA(x)$はformulaである.
6. 1～5以外の方法ではtermやformulaは得られない.

直観主義論理におけるsequentは「formulaの有限列⊢1個以下のformula」という形の有限列の事である. sequentの証明と言うのは公理から出発して推論規則のみを用いて導き出す事である.（直観主義論理の公理と推論規則は本文を参照されたい.）

Turing machineとはセルによって区切られた左右に無限に長いテープと読み取りヘッドと有限制御部からなる機械で，以下の条件を満たす理論上のデジタルコンピュータのことである．テープ上の各セルには１つのセルに１文字だけ書かれている．(空白文字も特殊文字の１つとみなす．）読み取りヘッドは各時点で１つのセルだけを見ている．各時点で，読み取りヘッドはセルから読み取った文字とその時点における有限制御部の内部状態との組み合わせによってその文字を書き換え，右隣または左隣のセルに移動し，内部状態を変化させ，次の時点へと移る.



Turing machineに文字列を入力してから出力が得られるまでの時間は一般に入力が大きくなるほど時間を消費するので，その時間を入力文字列の長さnの関数で表す．もちろん，Turing machineの性能によって消費時間は異なる．例えば昔のコンピュータは遅いが最近のコンピュータは速い．しかし，この時間の違いは高々定数倍である．従って，定数倍の違いは無視する．すなわち性能による差は無視して，もっと本質的な処理時間について考える．また，nが比較的小さい場合は定数で押さえられるから小さいnは無視して，十分大きいnについて考える．例えば，処理時間が多項式$a_0n^i+a_1n^{i-1}+\cdots\cdots+a_{i-1}n+a_i$の場合十分大きい$n$に対してはこの式は$(a_0+1)n^i$で押さえられ，$a_0+1$は定数だからこれを$n^i$と同一視する.

直観主義論理において与えられたsequentの証明可能性の判定に要する時間はどのくらい必要かということはあまり研究されていないようである．そこで，その判定時間を調べる事は興味深い事と思われる．本論分ではある条件の下では直観主義命題論理においても2^nステップでこれが可能である事を示した.（直観主義論理というのは直観主義述語論理の事であり，特に∀と∃を用いない論理を直観主義命題論理という．）